Problemi di Fisica

La Cinematica

Moti nel piano

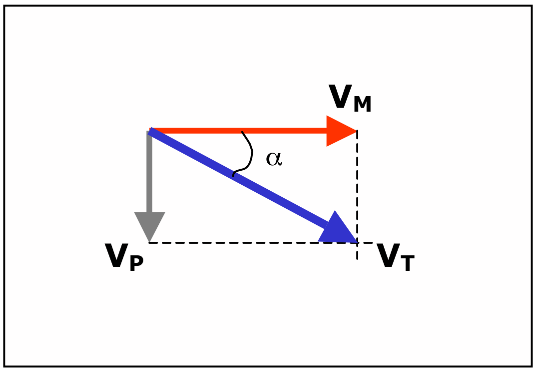
PROBLEMA

Mentre un'automobile viaggia a velocità costante V_M = 12 m/s una palla è lanciata orizzontalmente dal finestrino perpendicolarmente alla direzione di moto della macchina con velocità V_p = 5 m/s.

Calcolare:

- la velocità della palla, $\mathbf{V_T}$, rispetto al suolo in modulo, direzione e verso
- in quale istante toccherà terra, se il finestrino della macchina è a h = 80 cm dal suolo.

Soluzione



- La velocità della palla rispetto al suolo è la risultante della somma vettoriale tra $\mathbf{V_M}$ e $\mathbf{V_P}$, cioè $\mathbf{V_T}$, per cui il suo modulo e argomento sono dati da:

$$V_T = \sqrt{V_M^2 + V_P^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13\,m/s \qquad tg\alpha = \frac{V_P}{V_M} = 0{,}42 \Rightarrow \alpha = 22{,}6°$$

- Dato che la palla viene lasciata cadere con velocità iniziale nulla, l'istante di tempo in cui tocca il suolo viene determinato dall'equazione del moto lungo l'asse di caduta (perpendicolare al piano della figura), che è:

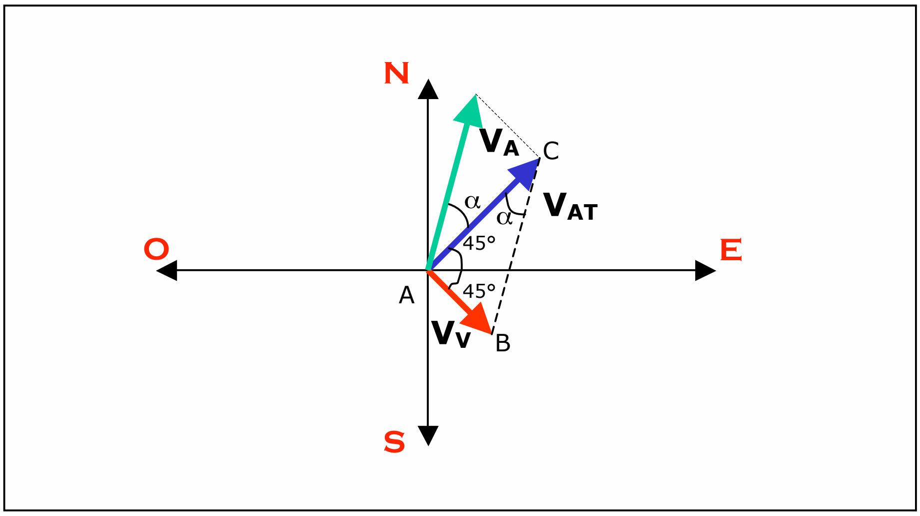
$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}8}{9{,}8}} = 0{,}41s$$

PROBLEMA

Un pilota vuole volare da una città ad un'altra a nord-est distante 1200 km. Se la velocità costante dell'aereo è V_A=260 km/h ed il vento soffia verso sud-est con velocità costante V_V=100 km/h, calcolare:

- ❖ In quale direzione deve essere pilotato l'aereo
- ❖ Quale sarà la velocità V_{AT} dell'aereo rispetto a terra
- ❖ Quanto tempo impiegherà l'aereo a raggiungere la seconda città.

Soluzione



- Il pilota deve dirigere l'aereo in modo che la sua velocità effettiva, V_{AT}, composizione vettoriale di V_A e di V_V, risulti diretta verso la città desiderata, ovvero inclinata di 45° sull'asse O-E.

  Dato che il triangolo ABC è rettangolo in A, deve essere:

$$V_V = V_A \cdot \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{V_V}{V_A} = \frac{100}{260} = 0{,}385 \Rightarrow \alpha = 22{,}6°$$

  Il pilota deve perciò dirigere l'aereo in una direzione che formi con O-E un angolo pari a:

$$\beta = \alpha + 45° = 22{,}6° + 45 = 67{,}6°$$

- La velocità dell'aereo rispetto a terra sarà:

$$V_{AT} = \sqrt{V_A^2 - V_V^2} = \sqrt{260^2 - 100^2} = \sqrt{57600} = 240\text{km/h}$$

- Tenendo conto che il moto dell'aereo è rettilineo uniforme, il tempo impiegato sarà:

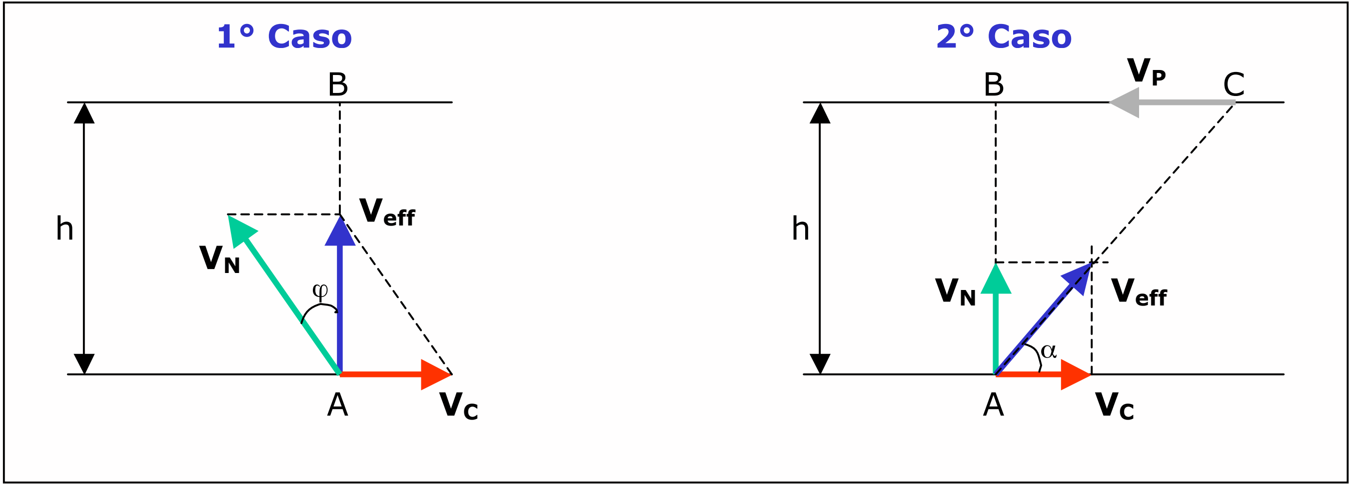
$$t = \frac{S}{V_{AT}} = \frac{1200}{240} = 5\text{h}$$

PROBLEMA

Un uomo si trova sulla riva di un fiume largo h=1 km e vuole raggiungere un punto che si trova di fronte a lui sull'altra riva. Egli può nuotare in una direzione inclinata di un angolo φ con la verticale in modo che per effetto della corrente il suo moto risulti trasversale, oppure può attraversare il fiume partendo in direzione perpendicolare alle sponde e raggiungere a piedi il punto B voluto camminando sull'altra riva. Sapendo che l'uomo può nuotare con velocità costante V_N=2,5 km/h, può camminare con velocità costante V_P=4 km/h e che la velocità costante della corrente è V_C=2 km/h, determinare: a) quale dei due tragitti è il più rapido; b) l'angolo φ.

Soluzione

Rappresentiamo il problema:



- 1° Caso

Se l'uomo vuole raggiungere l'altra sponda nel punto B deve nuotare dirigendosi in una direzione inclinata di un angolo φ sulla congiungente AB in modo che componendo vettorialmente le velocità $\mathbf{V_N}$ e $\mathbf{V_C}$, la velocità risultante $\mathbf{V_{eff}}$ sia diretta lungo AB. Pertanto l'angolo φ sarà dato da:

$$V_C = V_N \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{V_C}{V_N} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}80 \Rightarrow \varphi = 53{,}1°$$

Il tempo impiegato a raggiungere B si calcola sapendo che il moto è rettilineo uniforme:

$$T_1 = \frac{h}{V_{eff}} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}667h = 40{,}02\,\text{min} = 2401{,}2s$$

dove:

$$V_{eff} = \sqrt{V_N^2 - V_C^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5km/h$$

- 2° Caso

Se l'uomo si dirige verso il B l'effetto della corrente lo farà arrivare sulla riva opposta in un punto C con velocità effettiva:

$$V_{eff} = \sqrt{V_N^2 + V_C^2} = \sqrt{2{,}25^2 + 2^2} = \sqrt{10{,}25} = 3{,}2km/h$$

per cui il tempo impiegato sarà:

$$T_2 = \frac{AC}{V_{eff}} = \frac{1{,}28}{3{,}2} = 0{,}4h = 24\,\text{min} = 1440s$$

dove:

$$h = AC \cdot \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow AC = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{0{,}781} = 1{,}28km$$

con:

$$V_N = V_{eff} \cdot sen\alpha \Rightarrow sen\alpha = \frac{V_N}{V_{eff}} = \frac{2,5}{3,2} = 0,781 \Rightarrow \alpha = 51,3°$$

Ora l'uomo deve percorrere a piedi il tratto CB e impiegherà un tempo pari a :

$$T_2^{'} = \frac{CB}{V_P} = \frac{0,8}{4} = 0,2h = 12m = 720s$$

dove:

$$CB = AC \cdot \cos\alpha = 1,28 \cdot \cos 51,3° = 0,8km$$

Il tempo totale sarà:

$$T_2 + T_2^{'} = 1440 + 720 = 2160s$$

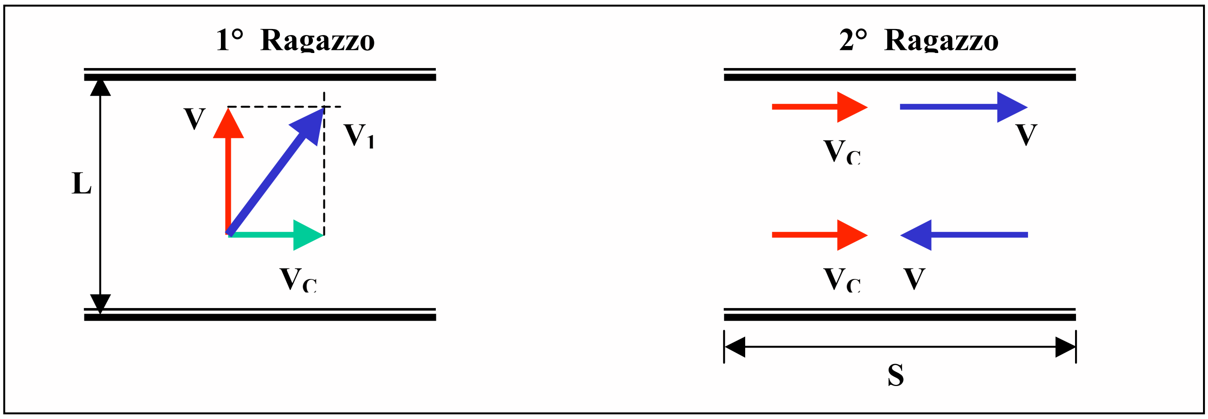
In definitiva il secondo tragitto è più breve del primo.

PROBLEMA

Un ragazzo attraversa a nuoto un fiume largo L=500 m e ritorna indietro. Un secondo ragazzo nuota per un tratto S=500 m controcorrente e poi ritorna al punto di partenza. Se la velocità della corrente è costante V_C = 3 km/h e i due ragazzi nuotano con velocità costante V=5 km/h, calcolare i tempi da essi impiegati.

Soluzione

Rappresentiamo il problema dal punto di vista vettoriale:



Il primo ragazzo si muoverà con una velocità effettiva $\mathbf{V_1}$ che è la risultante tra le velocità **V** e $\mathbf{V_C}$, il cui modulo e argomento è dato da:

$$V_1 = \sqrt{V^2 + V_C^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83km/h$$

$$tg\alpha = \frac{V}{V_C} = \frac{5}{3} = 1,67 \Rightarrow \alpha = 59°$$

mentre il tempo da esso impiegato per compiere l'intero tragitto è:

$$T_1 = \frac{2L}{V} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{5} = 0{,}2h = 12\,\text{min} = 720s$$

Il secondo ragazzo, invece, percorrerà il tratto di andata con velocità:

$$V_{2A} = V + V_C = 5 + 3 = 8km/h$$

e quello di ritorno con velocità:

$$V_{2R} = V - V_C = 5 - 3 = 2km/h$$

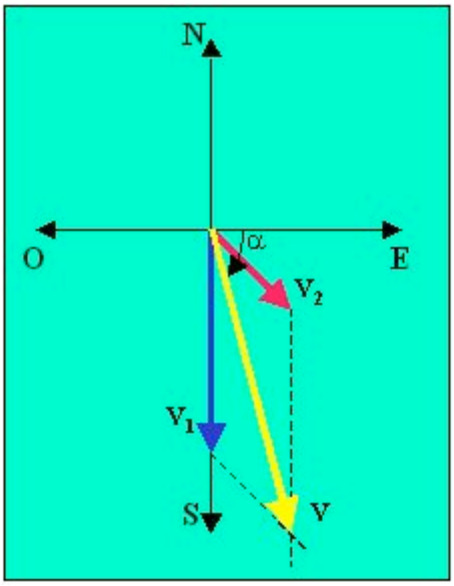
Il tempo totale impiegato sarà:

$$T_2 = T_{2A} + T_{2B} = \frac{S}{V_{2A}} + \frac{S}{V_{2R}} = \frac{0{,}5}{8} + \frac{0{,}5}{2} = 0{,}31h = 18{,}75\,\text{min} = 1125s$$

PROBLEMA

La bandiera issata sull'albero di una nave sventola sotto l'azione di un maestrale (vento da Nord-Ovest, α = 45°) che ha una velocità di 2,5 m/s. La barca affronta il mare facendo rotta verso Sud alla velocità di 10 nodi (1 nodo=1,8 km/h). In quale direzione si disporrà la bandiera (intensità della velocità della bandiera e angolo)?

Soluzione



Rappresentiamo prima graficamente il problema e poi calcoliamo la direzione lungo la quale si disporrà la bandiera:

$$V_{1x} = 0m/s$$
$$V_{1y} = 65m/s$$
$$V_{2x} = V_2 \cos\alpha_2 = 2{,}5 \cdot \cos 45° = 1{,}8m/s$$
$$V_{2y} = V_2 \sin\alpha_2 = 2{,}5 \cdot \sin 45° = 1{,}8m/s$$

$$\begin{cases} V_{Tx} = 1{,}8m/s \\ V_{Ty} = 65 + 1{,}8 = 66{,}8m/s \end{cases}$$

$$V_T = \sqrt{V_{Tx}^2 + V_{Ty}^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 66{,}8^2} = 66{,}8m/s$$

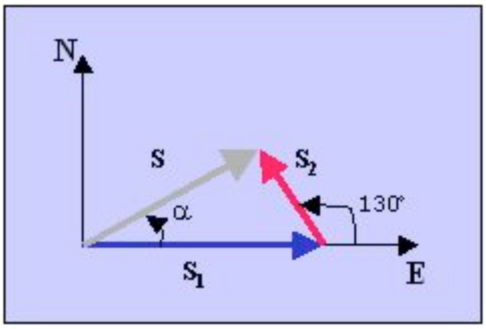
$$tg\alpha = \frac{V_{Ty}}{V_{Tx}} = \frac{66{,}8}{1{,}8} = 37{,}1 \Rightarrow \alpha = 88{,}5°$$

PROBLEMA

Un aereo si muove in direzione Est per 20 km e successivamente vira di 130° in senso antiorario e percorre altri 10 km. Determinare il vettore spostamento risultante.

Soluzione

Rappresentiamo prima graficamente il problema e poi calcoliamo il vettore spostamento risultante:



$$S_{1x} = 20km \qquad S_{2x} = S_2 \cos\alpha_2 = 10 \cdot \cos 130° = -6{,}4km$$
$$S_{1y} = 0 \qquad S_{2y} = S_2 \sin\alpha_2 = 10 \cdot \sin 130° = 7{,}7km$$

$$\begin{cases} S_{Tx} = 20.6{,}4 = 13{,}6km \\ S_{Ty} = 7{,}7km \end{cases}$$

$$S_T = \sqrt{S_{Tx}^2 + S_{Ty}^2} = \sqrt{13{,}6^2 + 7{,}7^2} = 15{,}6$$

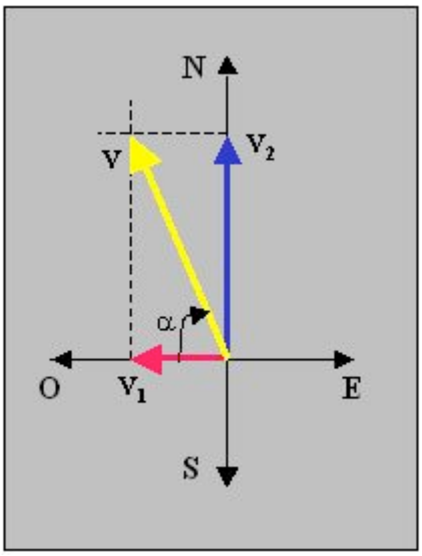
$$tg = \frac{S_{Ty}}{S_{Tx}} = \frac{7{,}7}{13{,}6} = 0{,}57 \Rightarrow \alpha = 29{,}7°$$

PROBLEMA

Un tedoforo corre con la fiaccola in mano alla velocità di 7 m/s in direzione Sud. Si alza un vento da Est che ha una velocità di 2 m/s. Quale sarà la direzione del fumo e la sua velocità?

Soluzione

Rappresentiamo prima graficamente il problema e poi calcoliamo la direzione del fumo e la sua velocità (se il tedoforo corre verso sud, il fumo si dirige nel verso opposto ossia verso nord):

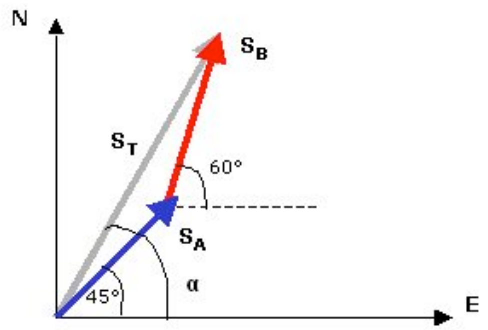


$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = 7{,}3m/s$$

$$tg\alpha = \frac{V_2}{V_1} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \Rightarrow \alpha = 74{,}1°$$

PROBLEMA

Una macchina si sposta di 6,8 km in direzione Est 45° Nord e successivamente di 10,4 km in direzione Est 60° Nord. Calcolare, dopo aver eseguito una rappresentazione grafica, lo spostamento risultante.



Soluzione

$S_{Ax} = S_A \cdot \cos 45° = 6{,}8 \cdot \cos 45° = 4{,}8km$ $\quad S_{Ay} = S_A \cdot \sin 45° = 6{,}8 \cdot \sin 45° = 4{,}8km$

$S_{Bx} = S_B \cdot \cos 60° = 10{,}4 \cdot \cos 60° = 5{,}2km$ $\quad S_{By} = S_B \cdot \sin 60° = 10{,}4 \cdot \sin 60° = 9{,}0km$

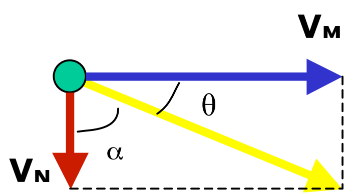
$S_{Tx} = S_{Ax} + S_{Bx} = 4{,}8 + 5{,}2 = 10km$ $\quad S_{Ty} = S_{Ay} + S_{By} = 4{,}8 + 9{,}0 = 13{,}8km$

$S_T = \sqrt{S_{Tx}^2 + S_{Ty}^2} = \sqrt{10^2 + 13{,}8^2} = 17{,}0km$ $\quad tg\alpha = \frac{S_{Ty}}{S_{Tx}} = \frac{13{,}8}{10} = 1{,}38 \Rightarrow \alpha = 54{,}1°$

PROBLEMA

La neve sta cadendo a una velocità costante di 8 m/s. A quale angolo rispetto alla verticale sembrano cadere i fiocchi di neve per il guidatore di un'auto che viaggia a 50 km/h?

Soluzione



Da considerazioni di carattere trigonometrico troviamo l'angolo cercato:

$$tg\vartheta = \frac{V_N}{V_M} = \frac{8}{13{,}9} = 0{,}58 \Rightarrow \vartheta = 30° \Rightarrow \alpha = 60°$$

PROBLEMA

Una particella passa dall'origine degli assi cartesiani con una velocità:

$$\vec{v} = 6{,}2\,\hat{y} \quad (v = 6{,}2\,m/s)$$

Se la sua accelerazione è:

$$\vec{a} = -4,4\,\hat{x} \quad (a = 4,4\,m/s^2)$$

calcolare:

a) le coordinate x e y della particella dopo 5,0 s;
b) le componenti v_x e v_y della velocità della particella nell'istante t=5,0 s;
c) il modulo della velocità della particella aumenta, diminuisce o rimane costante nel tempo? Giustificare la risposta.

Soluzione

a) Scriviamo la legge del moto uniformemente accelerato lungo i due assi cartesiani, poiché si tratta di un moto bidimensionale:

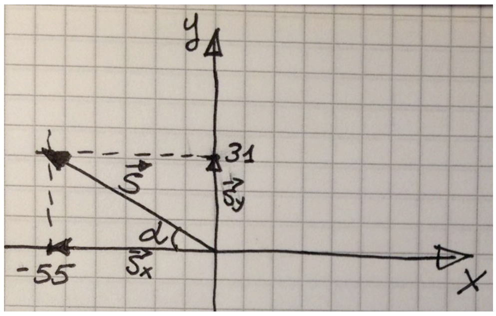
$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Sostituendo il valore della velocità nella seconda equazione (perché il vettore velocità ha solo la componente y) e quello dell'accelerazione nella prima equazione (perché ha solo la componente x), otteniamo:

$$x = \frac{1}{2}\cdot(-4,4)\cdot 5^2 = -55\,m$$
$$y = 6,2\cdot 5 = 31\,m$$

Pertanto, dopo 5s la posizione della particella è:

$$\vec{s} = -55\hat{x} + 31\hat{y} \xrightarrow{oppure} \vec{s} = (-55;31)$$



Modulo e angolo del vettore posizione sono:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{55^2 + 31^2} \cong 63\,m$$
$$tg\alpha = \frac{s_y}{s_x} = \frac{31}{55} = 0,56 \rightarrow \alpha \cong 29°$$

b) Scriviamo la legge oraria della velocità lungo i due assi cartesiani:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

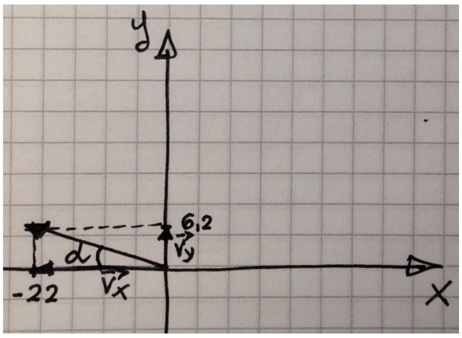
Sostituendo il valore della velocità nella seconda equazione (perché il vettore velocità ha solo la componente y) e quello dell'accelerazione nella prima equazione (perché ha solo la componente x), otteniamo:

$$v_x = -4,4 \cdot 5 = -22\,m/s$$
$$v_y = 6,2\,m/s$$

Pertanto, dopo 5s la velocità della particella è:

$$\vec{v} = -22\hat{x} + 6,2\hat{y} \xrightarrow{oppure} \vec{v} = (-22;6.2)$$

Modulo e angolo del vettore velocità sono:



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{22^2 + 6.2^2} \cong 23\,m/s$$
$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{6.2}{22} = 0,28 \rightarrow \alpha \cong 16°$$

c) La componente x della velocità aumenta costantemente, la componente y rimane costante, quindi il modulo della velocità aumenta nel tempo.

PROBLEMA

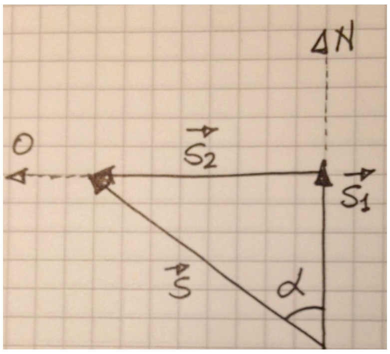
Un treno si muove con velocità costante e, in 12 s, si sposta di 170 m in direzione nord e di una distanza non conosciuta in direzione ovest. Il modulo della velocità del treno è 32 m/s.

Calcolare:

a) la direzione del moto del treno rispetto al nord;
b) in quell'intervallo di tempo, di quanto si sposta il treno in direzione ovest?

Soluzione

a) La direzione del moto del treno rispetto al nord (ossia l'angolo che il vettore spostamento **s** forma con l'asse N) la ricaviamo utilizzando la seguente relazione (teorema sul triangolo rettangolo):



$$v_y = v\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{14}{32} = 0,44 \rightarrow \alpha = 64°$$

dove:

$$v_y = \frac{y}{t} = \frac{170}{12} = 14\,m$$

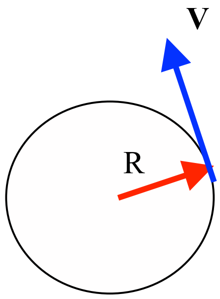
b) Il calcolo dello spostamento del treno verso ovest in 12 s è possibile attraverso l'utilizzo della definizione di tangente:

$$tg\alpha = \frac{x}{y} \rightarrow x = y \cdot tg\alpha = 170 \cdot tg64° \cong 350\,m$$

PROBLEMA

Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio 20 cm con frequenza di 5,0 Hz. Calcolare la velocità tangenziale ed il numero di giri compiuti in 20 s.

Soluzione



La velocità tangenziale la calcoliamo attraverso la sua definizione:

$$V = 2\pi Rf = 2\pi \cdot 0,2 \cdot 5,0 = 6,28 m/s$$

Dal concetto di frequenza (numero di giri compiuti in un secondo) ricaviamo che il numero di giri compiuti in 20 s è dato da:

$$N = 20 \cdot f = 20 \cdot 5 = 100 \text{ giri}$$

PROBLEMA

Supponendo che la Terra si muove intorno al Sole lungo un'orbita circolare di raggio R=150·10⁶ km, determinare la velocità tangenziale in km/s e l'accelerazione centripeta in m/s², tenendo presente che il periodo di rivoluzione è di 365 giorni.

Soluzione

La velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta le calcoliamo attraverso le loro definizioni:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{31,5 \cdot 10^6} \cong 30 km/s \qquad a_C = \frac{V^2}{R} = \frac{(30 \cdot 10^3)^2}{150 \cdot 10^6 \cdot 10^3} \cong 6 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

notare: 365 giorni = $31,5 \cdot 10^6$ secondi; 30 km/s = $30 \cdot 10^3$ m/s; 150 · 10^6 km = $150 \cdot 10^6 \cdot 10^3$ m

PROBLEMA

Secondo il modello atomico di Bohr–Rutherford l'elettrone di un atomo d'idrogeno ruota intorno al nucleo su determinate orbite. In condizioni di non eccitazione l'elettrone ruota con velocità tangenziale $V = 2,18 \cdot 10^6$ m/s e con accelerazione centripeta $a_c=8,97\cdot10^{22}$ m/s^2. Determinare il raggio dell'orbita, la velocità angolare e la frequenza.

Soluzione

Il raggio dell'orbita lo calcoliamo come formula inversa dell'accelerazione centripeta:

$$a_C = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_C} = \frac{(2{,}18 \cdot 10^6)^2}{8{,}97 \cdot 10^{22}} = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

La velocità angolare la calcoliamo come formula inversa della legge che la lega alla velocità tangenziale:

$$V = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{2{,}18 \cdot 10^6}{0{,}53 \cdot 10^{-10}} = 4{,}1 \cdot 10^{16}\,\text{rad/s}$$

La frequenza è data dalla formula inversa della definizione di velocità tangenziale:

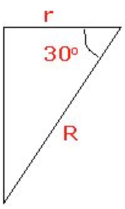
$$V = 2\pi R f \Rightarrow f = \frac{V}{2\pi R} = \frac{2{,}18 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}} = 0{,}65 \cdot 10^{16}\,\text{Hz}$$

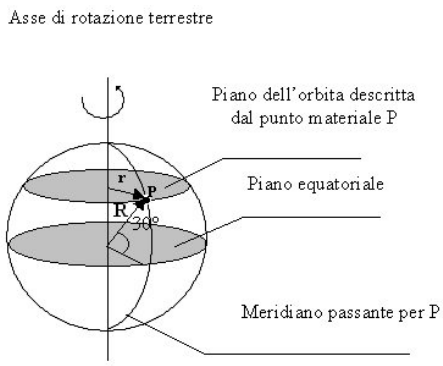
PROBLEMA

Calcolare la velocità e l'accelerazione di un punto materiale situato sulla superficie terrestre a 30° di latitudine Nord.

Soluzione

Rappresentiamo graficamente il problema.





Il raggio R della Terra forma con il raggio r del piano dell'orbita descritta dal punto materiale P un triangolo rettangolo, per cui utilizzando la relativa relazione trigonometrica otteniamo:

$$r = R \cdot \cos 30° = 6{,}38 \cdot 10^6 \cdot 0{,}866 = 5{,}52 \cdot 10^6\,\text{m}$$

Pertanto la velocità e l'accelerazione centripeta del punto materiale P saranno date da:

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 5{,}52 \cdot 10^6}{86400} = 402\,\text{m/s}$$

$$a_C = \frac{V^2}{r} = \frac{402^2}{5{,}52 \cdot 10^6} = 2{,}92 \cdot 10^{-2}\,\text{m/s}^2$$

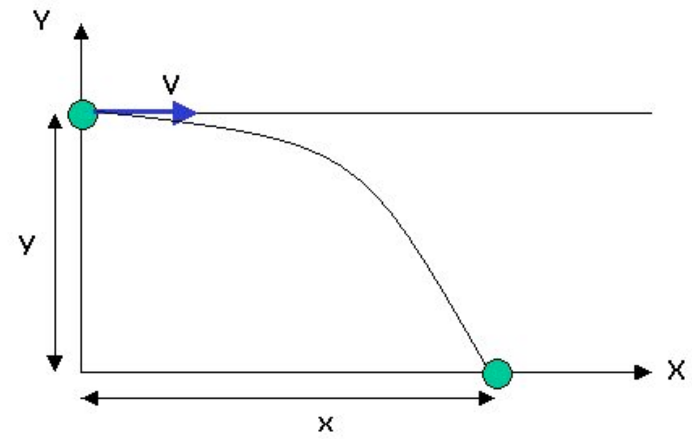
dove T = 24 ore = 86400 secondi

PROBLEMA

Un pacco abbandonato da un aeroplano in volo orizzontale a 200 m/s, tocca terra dopo 12 s. Calcolare l'altezza dell'aeroplano, la distanza orizzontale percorsa dal pacco e la velocità con cui esso tocca il suolo, trascurando la resistenza dell'aria.

Soluzione

Rappresentiamo il problema:



Il moto del pacco è un moto parabolico, che è un moto risultante di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = V_0 \cdot t \\ y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{g}{2V_0^2} x^2 = ax^2$$

Calcoliamo la distanza orizzontale percorsa dal pacco utilizzando la prima equazione:

$$x = 200 \cdot 12 = 2400\text{m}$$

Per poter calcolare l'altezza dell'aeroplano ci serviamo della seconda equazione:

$$y = \frac{9{,}8}{2 \cdot 200^2} \cdot 2400^2 = 706\text{m}$$

La velocità con cui tocca il suolo la calcoliamo come:

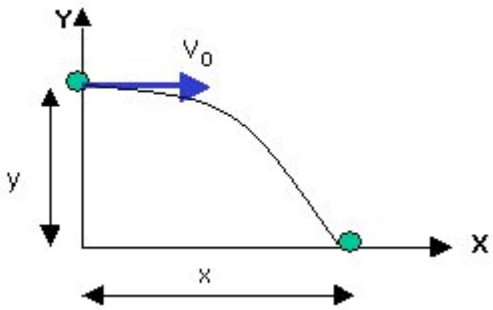
$$V = g \cdot t = 9{,}8 \cdot 12 = 118\text{m/s}$$

PROBLEMA

Un proiettile è stato sparato orizzontalmente dall'altezza di 49 m e tocca il suolo alla distanza orizzontale di 2000 m. Calcolare la velocità con cui è stato sparato.

Soluzione

La velocità la ricaviamo come incognita dall'equazione della parabola che descrive il moto parabolico:



$$y = \frac{g}{2V_0^2}x^2 \Rightarrow 2yV_0^2 = gx^2 \Rightarrow V_0^2 = \frac{gx^2}{2y} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 2000^2}{2 \cdot 49}} = 632\,m/s$$

PROBLEMA

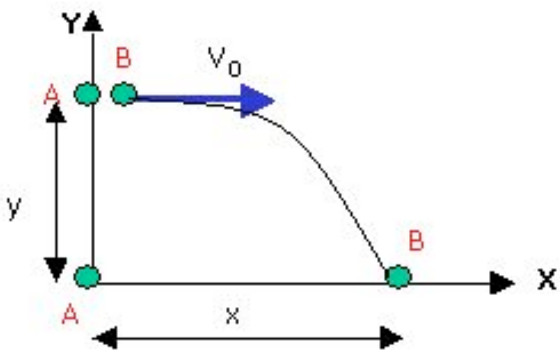
Due corpi A e B si trovano su una torre alta 490 m. Il corpo A viene lasciato cadere verso il basso e, nello stesso istante, B viene lanciato con velocità orizzontale di 50 m/s. Quale dei due corpi tocca prima il suolo? Quanto vale la distanza tra A e B quando sono a terra?

Soluzione

- Il moto verticale di un corpo, che cadendo si sposta anche orizzontalmente, è identico al moto verticale di un corpo in caduta libera, per cui i due corpi A e B toccano terra contemporaneamente.

- La distanza tra A e B quando sono a terra la calcoliamo dall'equazione che descrive il moto parabolico di B:

$$y = \frac{g}{2V_0^2}x^2 \Rightarrow 2V_0^2 y = gx^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2V_0^2 y}{g} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2V_0^2 y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50^2 \cdot 490}{9{,}8}} = 500\,m$$



PROBLEMA

A un aereo da bombardamento è affidato è affidato il compito di bombardare un sommergibile da una quota di 7840 m. Calcolare il tempo che il sommergibile ha a disposizione per immergersi.

Soluzione

Il tempo che il sommergibile ha a disposizione per immergersi non è altro che il tempo che impiega la bomba per colpirlo. Tenendo conto del principio di indipendenza dei movimenti simultanei, tale tempo è dato da:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7840}{9{,}8}} = 40s$$

PROBLEMA

Una palla viene lanciata orizzontalmente da un'altezza di 4,8 m con velocità iniziale di 4,5 m/s. Si chiede: la palla riuscirà a centrare un canestro posto a terra a distanza orizzontale di 6,2 m?

Soluzione

Il tempo di caduta della palla è dato da:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}8}{9{,}8}} = 0{,}990s$$

In questo tempo la palla può percorrere una distanza orizzontale pari a:

$$x = V_0 \cdot t = 4{,}5 \cdot 0{,}990 = 4{,}5m$$

per cui non riuscirà a centrare il canestro che è posto alla distanza di 6,2 m.

PROBLEMA

Un punto materiale si muove di moto armonico con legge oraria: $x = 50\cos\frac{\pi}{32}t$

Calcolare il periodo, la velocità e l'accelerazione dopo 10 secondi.

Soluzione

La legge oraria del moto armonico è la seguente:

$$x = R \cdot \cos\omega t$$

che confrontata con quella del problema si ricava che:

$$R = 50\text{m} \qquad \omega = \frac{\pi}{32}\ \text{rad/s}$$

Quindi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{32}} = 64\text{s}$$

$$v = -\omega R \cdot \sin \omega t = -\frac{\pi}{32} \cdot 50 \cdot \sin \frac{\pi}{32} \cdot 10 = -4{,}1\text{m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{1024} \cdot 50 \cdot \cos \frac{\pi}{32} \cdot 10 = -0{,}48\text{m/s}^2$$

PROBLEMA

Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme con periodo di 48 s sopra una circonferenza di raggio 40 cm. Calcolare l'equazione oraria dei due moti armonici, proiezioni del moto circolare uniforme su due diametri perpendicolari, nell'ipotesi che il punto al tempo t=0 si trovi ad un estremo dei due diametri.

Soluzione

L'equazione oraria dei moti armonici lungo l'asse X e Y è la seguente:

$$x = R \cdot \cos \omega t \qquad y = R \cdot \sin \omega t$$

Dai dati del problema si ricava che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{48} = \frac{\pi}{24}$$

quindi le leggi orarie diventano:

$$x = 40 \cdot \cos \frac{\pi}{24} t \qquad y = 40 \cdot \sin \frac{\pi}{24} t$$

PROBLEMA

Le proiezioni di un moto circolare uniforme sopra due diametri ortogonali si muovono di moto armonico secondo le leggi orarie:

$$x = 25 \cdot \cos \frac{\pi}{8} t \qquad y = 25 \cdot \sin \frac{\pi}{8} t$$

con x e y espressi in cm. Determinare il valore della velocità e dell'accelerazione dopo 8 s ed il valore dell'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme.

Soluzione

Dalle leggi orarie del moto armonico fornite dal problema si ricava che:

$$R = 25\text{cm} \qquad \omega = \frac{\pi}{8}\ \text{rad/s}$$

Per determinare il valore della velocità e dell'accelerazione lungo i diametri ortogonali, applichiamo le rispettive leggi orarie:

$$V_x = -\omega R \cdot \sin\omega t = -\frac{\pi}{8}\cdot 25\cdot \sin\frac{\pi}{8}\cdot 8 = 0 \qquad V_y = -\omega R\cdot \cos\omega t = -\frac{\pi}{8}\cdot 25\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot 8 = -9{,}8\text{cm}/\text{s}$$

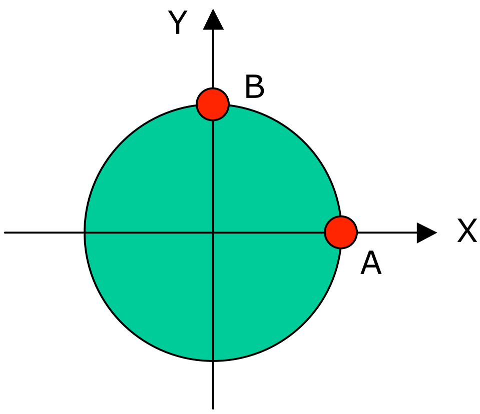
$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{64}\cdot 25\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot 8 = 3{,}9\text{cm}/\text{s}^2 \qquad a_x = -\omega^2 x = -\frac{\pi^2}{64}\cdot 25\cdot \sin\frac{\pi}{8}\cdot 8 = 0$$

L'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme sarà calcolata come segue:

$$a_c = \omega^2 R = \frac{\pi^2}{64}\cdot 25 = 3{,}9\text{cm}/\text{s}^2$$

PROBLEMA

Un punto materiale descrive una traiettoria circolare di raggio R = 10 m partendo dal punto A ed impiega 10 s per raggiungere il punto B:

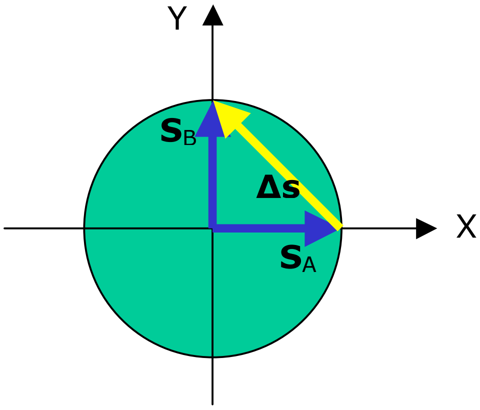


Calcolare: 1) Il vettore spostamento e rappresentarlo graficamente; 2) Il cammino percorso; 3) La velocità media

Soluzione

1) La rappresentazione grafica del vettore spostamento è la seguente:

$$\Delta\vec{S} = \vec{S}_B - \vec{S}_A$$



Mentre il modulo del vettore spostamento è dato da:

$$\Delta S = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14{,}14m$$

2) Spostandosi da A a B il punto materiale percorre un quarto di circonferenza, pari a π/2 rad, per cui il cammino percorso sarà:

$$L = \frac{\pi}{2} \cdot R = \frac{\pi}{2} \cdot 10 = 15{,}7m$$

3) La velocità media, tenendo sempre conto che il punto materiale percorre π/2 rad, la determiniamo attraverso la sua definizione:

$$V = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot R}{t} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 10}{10} = 1{,}57m/s$$

PROBLEMA

Due moti armonici tra loro ortogonali hanno le seguenti leggi orarie:

$$x = 10\cos 2\pi t \qquad y = 20\cos 2\pi t$$

Determinare la traiettoria del moto risultante.

Soluzione

L'equazione della traiettoria del moto risultante, ossia y = f(x), la determiniamo mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x = 10 \cdot \cos 2\pi t \\ y = 20 \cdot \cos 2\pi t \end{cases}$$

Ricavando la t dalla prima equazione: $t = \dfrac{x}{10 \cdot \cos 2\pi}$ e sostituendola nella seconda otteniamo:

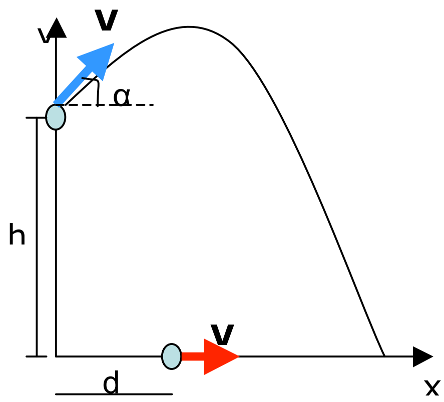
$$y = 20 \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{x}{10 \cdot \cos 2\pi} = 2x$$

Dall'equazione trovata si conclude che la traiettoria è una retta.

PROBLEMA

Un pallone viene lanciato con un angolo α=30° dalla sommità di un palazzo alto 20 m come. La velocità iniziale sia V_0=10 m/sec. Nello stesso istante, da un punto che si trova a 40 m dalla base del palazzo, un uomo corre per cercare di prendere il pallone quando questo tocca il suolo. Quale deve essere la velocità dell'uomo per poter prendere il pallone? Trascurare la resistenza dell'aria.

Soluzione



Occorre calcolare il punto di impatto del pallone col suolo e il tempo di volo per poter calcolare la velocità dell'uomo. Dividiamo il moto del pallone nelle sue componenti orizzontale e verticale. Il moto del pallone e' uniforme lungo la proiezione orizzontale con velocità:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha = 10 \cdot 0{,}866 = 8{,}66 m/s$$

Il moto del corpo e' uniformemente ritardato nel moto verso l'alto e uniformemente accelerato nel moto verso il basso nella sua componente verticale. La velocità iniziale lungo la verticale sara':

$$V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 0{,}5 = 5 m/s$$

Nel moto verso l'alto la legge oraria sara':

$$y = y_0 + V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Nel punto di massima altezza il corpo si ferma per cui possiamo calcolare il tempo di salita:

$$V_{0y} = g \cdot t_S \Rightarrow t_S = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{5}{9{,}8} = 0{,}5s$$

e in questo tempo percorre un tratto:

$$y_1 = V_{0y} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 5 \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5^2 = 1{,}3m$$

Il corpo raggiunge quindi un'altezza totale, rispetto al suolo pari a:

$$y_2 = h + y_1 = 20 + 1{,}3 = 21{,}3m$$

Da questo momento in poi il corpo si muove verso il basso partendo dall'altezza y_2 con velocità nulla. La sua legge oraria sara':

$$y = y_2 - \frac{1}{2} g t^2$$

Esso raggiunge il suolo quando y = 0, per cui il tempo impiegato sarà:

$$0 = y_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{}}$$

Il tempo di volo totale sara' quindi:

$$t = t_1 + t_2 = 0{,}5 + 2{,}1 = 2{,}6s$$

In questo tempo la sua proiezione orizzontale percorre una distanza:

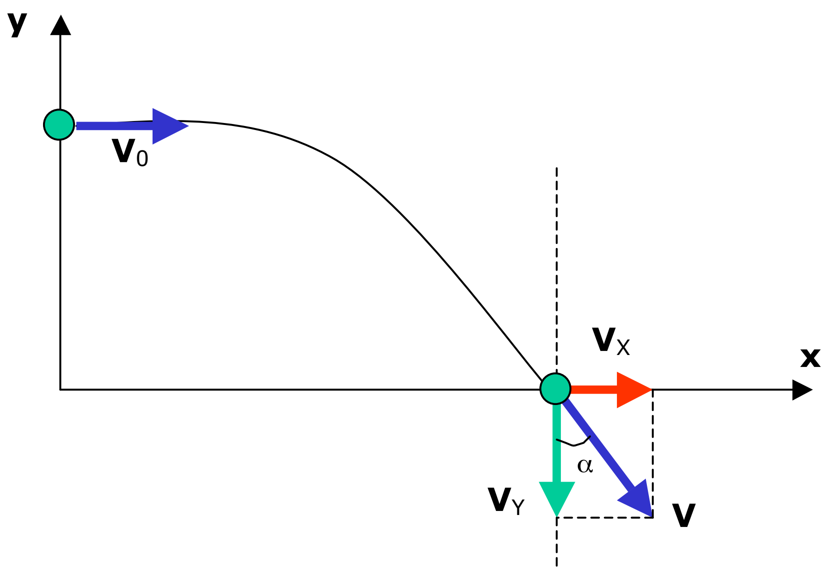
$$x = V_{0x} \cdot t = 8{,}7 \cdot 2{,}6 = 22{,}6m$$

Trovandosi l'uomo a 40 m deve percorrere una distanza x = 40 - 22.6 = 17,4 m in un tempo t = 2,6 s per cui la sua velocità sara':

$$V = \frac{x}{t} = \frac{17{,}4}{2{,}6} = 6{,}7 m/s$$

PROBLEMA

Un corpo viene lanciato, con una velocità iniziale orizzontale V_0=10 m/sec da un palazzo alto h=35 m come in figura. Determinare: a) Il tempo di volo; b) la distanza x, misurata dalla base del palazzo, del punto d'impatto del corpo col suolo; c) l'angolo formato dalla direzione della velocità con la verticale al momento dell'impatto.



Soluzione

Il tempo di volo viene calcolato tenendo presente che il moto verticale del corpo è un moto uniformemente accelerato:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35}{9{,}8}} = 2{,}7s$$

Utilizziamo la legge del moto rettilineo uniforme, che caratterizza il moto orizzontale del proiettile, per calcolare la distanza del punto d'impatto del corpo col suolo:

$$x = V_0 \cdot t = 10 \cdot 2{,}7 = 27m$$

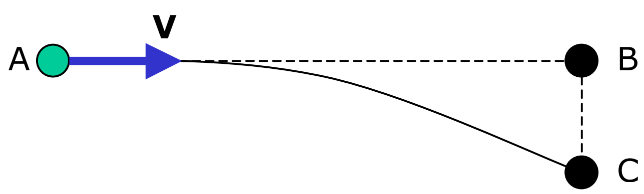
Per calcolare l'angolo formato dalla velocità con la verticale, consideriamo il triangolo rettangolo formato dalla velocità V e dalle sue componenti V_x e V_y. Possiamo quindi scrivere:

$$tg\alpha = \frac{V_x}{V_y} = \frac{V_x}{g \cdot t} = \frac{10}{9{,}8 \cdot 2{,}7} = 0{,}4 \Rightarrow \alpha = 21° \qquad \text{dove:} \quad V_y = gt \quad e \quad V_x = V_0$$

PROBLEMA

Un fucile è puntato orizzontalmente contro un bersaglio alla distanza di 30 m. il proiettile colpisce il bersaglio 1,9 cm sotto il centro. Calcolare la velocità del proiettile.

Soluzione



Il moto del proiettile è un moto parabolico, che è un moto risultante di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = V \cdot t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo il tempo di volo del proiettile:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}019}{9{,}8}} = 0{,}06s$$

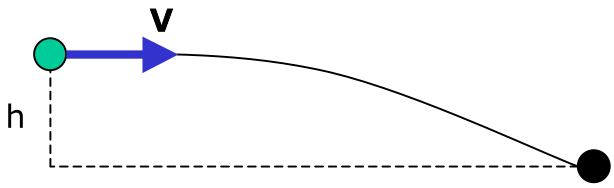
che sostituito nella prima equazione ci consente di calcolare la velocità del proiettile:

$$V = \frac{x}{t} = \frac{30}{0{,}06} = 500m/s$$

PROBLEMA

Un fucile, distante 45 m da un bersaglio, spara un proiettile alla velocità di 450 m/s. Quanto più alto dal bersaglio deve essere puntato il fucile per riuscire a colpire il bersaglio?

Soluzione



Il moto del proiettile è un moto parabolico, che è un moto risultante di un moto uniformemente accelerato e di un moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = V \cdot t \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il tempo di volo del proiettile:

$$t = \frac{x}{V} = \frac{45}{450} = 0{,}1\text{s}$$

che sostituito nella seconda equazione ci consente di calcolare l'altezza, rispetto al bersaglio, del fucile:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}049\text{m} = 4{,}9\text{cm}$$

PROBLEMA

Un elettrone, per effetto di un campo magnetico, percorre una traiettoria circolare di raggio R = 15 cm e accelerazione centripeta a_c=3,0·10^{14} m/s^2. Calcolare il periodo del moto.

Soluzione

Il periodo del moto viene calcolato partendo dalla definizione di velocità del moto circolare uniforme:

$$V = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{V}$$

Però manca il valore della velocità, che calcoliamo come formula inversa dell'accelerazione centripeta:

$$a_C = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V = \sqrt{a_C \cdot R} = \sqrt{3{,}0 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}15} = 0{,}67 \cdot 10^7 \, \text{m/s}$$

In definitiva:

$$T = \frac{2\pi \cdot 0{,}15}{0{,}67 \cdot 10^7} = 1{,}4 \cdot 10^{-7} s = 0{,}14 \mu s$$

PROBLEMA

Un satellite terrestre viaggia su un'orbita circolare alla quota di 640 km sopra la superficie terrestre. Il periodo di rivoluzione è di 98 minuti. Calcolare:

1. la velocità del satellite
2. il valore della gravità a quella quota.

Soluzione

1. La velocità posseduta dal satellite lungo la traiettoria circolare si calcola come:

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 7{,}01 \cdot 10^6}{5880} = 7{,}5 \cdot 10^3 m/s = 7{,}5 km/s$$

dove:

$R = 640 \cdot 10^3 + R_{Terra} = 640 \cdot 10^3 + 6{,}37 \cdot 10^6 = 7{,}01 \cdot 10^6$ m   98 minuti = 5880 s

1. Il valore della gravità alla quota di 640 km non è altro che l'accelerazione centripeta:

$$a_C = \frac{V^2}{R} = \frac{(7{,}5 \cdot 10^3)^2}{7{,}01 \cdot 10^6} = 8 m/s^2$$

PROBLEMA

Una persona sale in 90 s una scala mobile ferma di 15 m di lunghezza. La stessa persona, stando ferma sulla scala mobile quando è in funzione, impiega 60 s. Calcolare:

1. il tempo impiegato nel caso in cui sale con la scala mobile in funzione
2. la risposta dipende dalla lunghezza della scala?

Soluzione

1. La velocità con cui la persona sale la scala mobile quando è ferma è data da:

$$V_{persona} = \frac{L}{t_{persona}} = \frac{15}{90} = 0{,}17 m/s$$

La velocità della persona quando è ferma sulla scala mobile in funzione è data da:

$$V_{scalamobile} = \frac{L}{t_{scalamobiule}} = \frac{15}{60} = 0{,}25 m/s$$

Il tempo impiegato dalla persona, nel caso in cui sale con la scala mobile in funzione, è dato da:

$$t = \frac{L}{V_{persona} + V_{scalamobile}} = \frac{15}{0{,}17 + 0{,}25} = 36s$$

2. Per verificare se la risposta trovata dipende dalla lunghezza della scala mobile, esprimiamo il tempo calcolato nella sua forma generale:

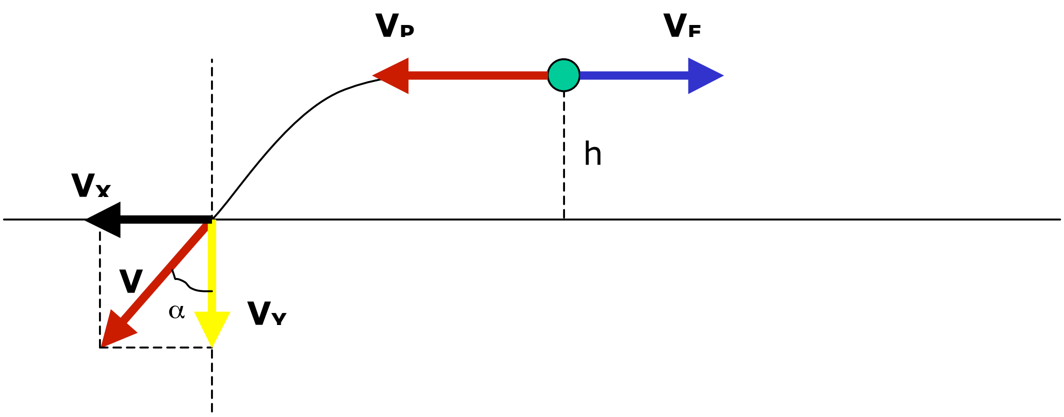
$$t = \frac{L}{V_{persona} + V_{scalamobile}} = \frac{L}{\frac{L}{t_{persona}} + \frac{L}{t_{scalamobile}}} = \frac{L}{\frac{L \cdot t_s + L \cdot t_p}{t_p \cdot t_s}} = \frac{\cancel{L}}{\frac{\cancel{L} \cdot (t_s + t_p)}{t_s \cdot t_p}} = \frac{t_s \cdot t_p}{t_s + t_p}$$

Dalla formula ricavata si può affermare che il tempo impiegato dalla persona per salire la scala mobile quando è in funzione è indipendente dalla lunghezza della stessa.

PROBLEMA

Un elicottero vola in linea retta alla velocità costante di 6,2 m/s e alla quota costante di 9,5 m. Un pacco viene lanciato orizzontalmente dall'elicottero con velocità relativa all'elicottero di 12 m/s in senso opposto alla rotta. Calcolare:

1. la velocità iniziale del pacco rispetto al terreno
2. la distanza orizzontale tra il pacco e l'elicottero al momento dell'impatto con il terreno
3. visto da terra, quale angolo con il terreno forma il vettore velocità del pacco al momento dell'impatto.



Soluzione

1. La velocità del pacco rispetto al terreno è data da:

$$V_{terra} = V_{pacco} - V_{aereo} = 12 - 6{,}2 = 5{,}8 m/s$$

2. Per calcolare la distanza orizzontale tra il pacco e l'elicottero al momento dell'impatto con il terreno, dobbiamo prima calcolare il tempo di volo:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,5}{9,8}} = 1,4s$$

per cui:

$$\begin{cases} x_{pacco} = V_{terra} \cdot t = 5,8 \cdot 1,4 = 8,1m \\ x_{aereo} = V_{aereo} \cdot t = 6,2 \cdot 1,4 = 8,7m \end{cases} \Rightarrow x = x_{pacco} + x_{aereo} = 8,1 + 8,7 = 16,8m$$

2. Da considerazioni di carattere trigonometrico troviamo l'angolo cercato:

$$tg\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{g \cdot t}{V_x} = \frac{9,8 \cdot 1,4}{5,8} = 2,4 \Rightarrow \alpha = 67°$$